18/11/2015

Αντιστροφή πίνακα με LU παραγοντοποίηση

$AX = I \iff AX^{(i)} = e^{(i)}, \ i=1,2,\dots,n \iff L\underbrace{UX}_{Y} = I \ (\iff LUX^{(i)} = e^{(i)}) \iff$

$$\begin{cases} LY = I \\ UX = Y \end{cases}$$

Να βρεθεί ο αντίστροφος του $A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

με απαλοιφή Gauss έχουμε:

$$\begin{array}{c|ccc} & \underline{9} & 6 & 3 \\ \frac{2}{3} & 6 & 8 & 4 \\ \frac{1}{3} & 3 & 4 & 3 \\ \hline & & \underline{4} & 2 \\ & \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \hline & & & 1 \end{array}$$

$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$LY = I$ $\quad y^{(1)} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ $\quad y_1 = 1, \ y_2 = 0 - \frac{2}{3} \cdot 1 = -\frac{2}{3}$

$y_3 = 0 - \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$

$y^{(2)} = \begin{pmatrix} y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix}$ $\quad y_4 = 0/1 = 0$

$y_5 = 1 - 0 \cdot \frac{2}{3} = 1$

$y_6 = 0 - \frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}$

$y^{(3)} = \begin{pmatrix} y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{pmatrix}$ $\quad y_7 = 0/1 = 0$

$y_8 = 0 - \frac{2}{3} \cdot 0 = 0$

$y_9 = 1 - \frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 = 1$

Άρα $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$

$UX = Y$ $\quad X^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\quad x_1 = (1 - 6(-1/6) - 3 \cdot 0)/9 = 2/9$

$x_2 = (-2/3 - 2 \cdot 0)/4 = -1/6$

$x_3 = 0/1 = 0$

$X^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $x_3 = (-1/2)/1 = -1/2$
$x_2 = (1 - 2(-1/2))/4 = \frac{1}{2}$
$x_1 = (0 - 6\cdot\frac{1}{2} - 3(-\frac{1}{2}))/9 = -1/6$

$X^{(3)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $x_3 = 1/1 = 1$
$x_2 = (0 - 2\cdot 1)/4 = -\frac{1}{2}$
$x_1 = (0 - 6(-\frac{1}{2}) - 3\cdot 1)/9 = 0$

Άρα $X = \begin{bmatrix} 2/9 & -1/6 & 0 \\ -1/6 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} = A^{-1}$ (συμμετρικός)

A συμμετρικός

$AX = I \Leftrightarrow (AX)^T = I^T = X^T A^T = I \Leftrightarrow X^T A = I \Leftrightarrow A^{-1} = X^T \Leftrightarrow X$ συμμετρικός

$\det A = \det(LU) = \det(L)\det(U) \overset{\text{λόγω τριγ.}}{=\!=} 1 \cdot 36 = 36$

Μέθοδος απαλοιφής του Gauss με μορφή οδήγηση. Αποδεικνύεται ότι αν οι απόλυτες τιμές των πολλαπλασιαστών τότε έχουν μεγάλα σφάλματα στη λύση

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$(\Sigma): \begin{cases} 10^{-4}x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ με με αριθμό μηχανής $M = M(10, 3, -20, 20)$

Η ακριβής λύση είναι $x_1 = \frac{10000}{9999} = 1.\overline{0001}$ $x_2 = \frac{9998}{9999} = 0,\overline{9998}$

$m_{21} = 10^4$ $a_{22}^{(2)} = fl(a_{22}^{(1)} - m_{21}a_{12}^{(1)}) = fl(1 - 10^4 \cdot 1) = fl(-9999) = -10^4$.
$b_2^{(2)} = fl(b_2^{(1)} - m_{21}b_1^{(1)}) = fl(2 - 10^4 \cdot 1) = fl(-9998) = -10^4$

$\begin{matrix} 10^{-4} & 1 & 1 \\ & -10^4 & -10^4 \end{matrix}$ $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ ⇝ εντελώς λάθος!

(Βελτίωση Αλγορίθμου) Αλλάζουμε την σειρά των εξισώσεων

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 10^{-4}x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$ $m_{21} = 10^{-4}$ $a_{22}^{(2)} = fl(a_{12}^{(1)} - m_{21}a_{12}^{(1)}) = f(1 - 10^{-4}\cdot 1) = fl(0,9$
$= 1$.

$b_2^{(2)} = fl(b_2^{(1)} - m_{21}b_1^{(1)}) = fl(1 - 10^{-4}\cdot 2) = fl(0,9998) = 1$

(*) $x_1 = 1$ $x_2 = 1$ (αρκετά κοντά στην πραγμ. λύση)

(*) $\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ & 1 & 1 \end{matrix}$

$x_1 = 1/1 = 1$ $x_2 = 2 - 1 \cdot 1 = 1$

Κατά την r στην σειρά απαλοιφή αλλάζουμε την r-εξίσωση με την k-εξίσωση $(k \geq r)$ τ.ω $|a_{kr}^{(r)}| = \max\limits_{r \leq i \leq n} |a_{ir}^{(r)}|$

Να λυθεί το σύστημα με μέθοδο απαλοιφής Gauss με μερική οδήγηση

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Έχουμε $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[|2| > |1| \cdot \frac{1}{4}]{|4| > |1|,\ |4| > |2| \cdot \frac{1}{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3/2 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$x_3 = 1/1 = 1$

$x_2 = -1$

$x_1 = 1$

$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

1/4	1	1	1	1	
1/2	2	-1	1	4	
	4	1	1	4	

-1/2	0	3/4	3/4	0
	0	-3/2	1/2	2
	4	1	1	4

0	0	1	0
0	-3/2	1/2	2
4	1	1	4

$i = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ για την προς τα πίσω αντικατάσταση θα ξεκινήσουμε απ' την 3η εξίσωση

Αυτό το κάναμε για να γλιτώσουμε πράξεις στον υπολογιστή

$x_3 = b_{i_{3,3}}^{(3)} / a_{i_{3,3}}^{(3)}$ αντί για $x_3 = b_3^{(3)} / a_{33}^{(3)}$

Ουσιαστικά έγινε απαλοιφή Gauss στο σύστημα $PA = Pb$ όπου

$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (θετικός πίνακας)